第45卷 第4期 气 象 科 学 Vol. 45, No.4
2025年8月 Journal of the Meteorological Sciences Aug., 2025

钱正迪,周学云,张鹤鸣,等.多个历时的异常降水的重现期计算方法研究.气象科学,2025,45(4):490-503.
QIAN Zhengdi, ZHOU Xueyun, ZHANG Heming, et al. Study of calculation method of return period of multi-duration abnormal precipitation. Journal of the Meteorological Sciences, 2025,45(4):490-503.

多个历时的异常降水的重现期计算方法研究

钱正迪[1] 周学云[1,2] 张鹤鸣[1] 伏薇[1] 陈泓吾[1]

(1 雅安市气象台,四川 雅安 625000; 2 高原与盆地暴雨旱涝灾害四川省重点实验室,成都 610072)

摘要 2020年8月11日四川省芦山县国家气象站出现了远超历史平均值的异常降水,24 h雨量达425.7 mm,其中3 h雨量达348.6 mm,造成了较大的气象灾害。为准确评估本次降水天气过程在当地历史上的影响,使用芦山国家气象站1980—2021年共42 a的多个历时(60,120,180,360,720,1 440 min)的年最大值降水资料,采用了根据卡方检验排序,以均方误差和残差平方和和Wasserstein距离两个指标为评判标准,兼顾不同历时降水的分布一致性,在80个概率密度分布函数中筛选了最优分布johnsonsb分布,并根据分布函数的逆函数推算重现期。结果表明:与目前水文和气象上经常采用的皮尔逊Ⅲ型、耿贝尔分布、伽马分布等类型有限的分布相比,该方法能够保证拟合的总体数学误差更小,兼顾了工程实用性,特别当出现异常降水时,其计算的重现期更接近实际情况。经过雨城、天全、宝兴和石棉4个县区的对比,采用该方法计算的重现期能够较好地反映降水重现期情况。

关键词 概率分布; 重现期; 数学误差 ; Wasserstein距离

分类号: P468.024 **doi**:10.12306/jms2023.0063 **文献标识码**: A

Study of calculation method of return period of multi-duration abnormal precipitation

QIAN Zhengdi[1] ZHOU Xueyun[1,2] ZHANG Heming[1] FU Wei[1] CHEN Hongwu[1]

(1 *Ya'an Meteorological Observatory*, *Sichuan Ya'an* 625000, *China*; 2 *Heavy Rain and Drought-Flood Disasters in Plateau and Basin Key Laboratory of Sichuan Province*, *Chengdu* 610072, *China*)

Abstract On 11 August, 2020, the National Meteorological Station in Lushan County, Sichuan Province, experienced an extremely abnormal precipitation event that far exceeded historical averages. The 24-hour rainfall reached 425.7 mm, ranking second in historical records for Sichuan Province. Within a 3-hour span, rainfall reached 348.6 mm, causing significant meteorological disasters. To accurately assess the impact of this rainfall event in the local history, annual maximum rainfall data spanning 42 years (1980-2021) with various durations (60,120, 180, 360, 720, 1 440 minutes) were collected from the Lushan National Meteorological Station. Employing a combination of chi-square test sorting, mean square error, residual sum of squares, and Wasserstein distance, as evaluation criteria, while considering the consistency of precipitation distributions across different durations, the optimal distribution, Johnsonsb distribution, were selected from among 80 probability density distribution functions. Reoccurrence period wasinferred by using the inverse function of the distribution. Results indicate that this method, when compared to commonly used limited distributions such as Pearson Type

收稿日期(Received):2023-05-23;**修改稿日期**(Revised):2023-08-27

基金项目:四川省科技计划资助项目(2023YFS0434);四川省科技计划资助项目(2022YFS0544);中国气象局西南区域气象中心川藏铁路气象服务技术创新团队基金(XNQYCXTD202201)

通信作者(Corresponding author):周学云(ZHOU Xueyun). 42333700@qq.com

III, Gumbel, and Gamma distributions in hydrological and meteorological contexts, minimized overall mathematical fitting errors and considered engineering practicability. Particularly during anomalous precipitation events, the computed reoccurrence periods were more in line with actual scenarios. Through comparison across counties including Yucheng, Tianquan, Baoxing, and Shimian, the reoccurrence periods calculated by using this method effectively reflected precipitation reoccurrence characteristics.

Key words probability distribution; return period; mathematical error; Wasserstein distance

引　言

近年来,极端降水天气频繁发生,2020 年 8 月 11 日四川芦山日降水量 425.7 mm,排名位于四川省有历史记录以来第二名,其中 3 h(180 min)雨量为 348.6 mm,雨强极大,造成了较大灾害。2021 年 7 月 20 日河南郑州出现 24 h 累计降水量为 696.9 mm 的降水(郑州市二七区尖岗气象站),超过郑州全年平均降水总量,其中郑州气象观测站最大小时降水量达 201.9 mm(20 日 16—17 时,北京时,下同),突破了中国大陆小时降水量的历史极值。2022 年 8 月 13 日 08 时至 14 日 08 时,青海有 70 个测站降水量超过 50 mm,化隆镇最大降水量 85.6 mm,突破本站历史极值。强降水事件的增多表明,随着全球变暖,各地出现突破历史极值降水的几率也在逐渐增加。这种降水一般被称为异常降水。异常降水是极端天气的一种,是指一定地区在一定时间内出现的历时上罕见的气象降水事件,其发生概率通常小于 5%或 10%,一般特点是发生概率小、社会影响大,在气象上一般是指雨量超出一定阈值的降水(本文中提到的异常降水都是指异常偏多的降水,不包括降水异常偏少的极端天气事件)。由于异常降水发生概率小,造成灾害损失大,引发的民众关注度也高[1-2]。

对于异常降水的产生原因及降水周期和分布已有诸多研究和分析,邬晓丹等[3]分析了异常降水的时空演变特征。江远安等[4]分析了降水的极值变化特征,孙善磊等[5]分析了淮海地区降水周期及突变特征,此外还有诸多针对异常降水演变和规律的分析研究。栾澜等[6]、蒋薇等[7]、叶梦茜等[8]分别对青藏高原雨季降水特征变化、长江三角洲夏季降水异常和中国东部区域极端降水事件特征进行了分析,兰明才等[9]基于我国降水量资料、NCEP/NCAR 再分析资料和 NOAA 海表温度资料,研究了我国南方地区夏季降水的典型模态及其时间演变。尹家波等[10]通过卫星遥感、大气再分析、气候模式等方式对全球极端降水的热力学驱动机理进行了研究,张磊等[11]通过长时间序列对关中平原极端降水时空变化及非平稳性进行了分析。

评估愈加频繁的异常降水,一般会针对不同历时的雨量进行重现期的计算。重现期是水文和气象上广泛使用的概念,通过对一段时间的降水数据分布模拟,计算其概率分布频率函数,再根据分布函数的逆函数推算某降水强度重复出现的时间的阈值,通过重现期判断其在时间上为 N 年一遇[12-13]。

国内多采用年最大值法来提取逐年的历史最大降水,然后对其分布情况选取合适的概率密度函数进行拟合。孙桂凯等[14]通过峰度法、百分位法和年交叉率法,采用广义帕累托分布(GPD)模拟分析广西各站点的日极端降水量,王同旭等[15]以流域水文断面历年洪峰流量为例,利用独立样本分析法对该断面洪水频率进行了分析计算。总结发现,最常使用皮尔逊Ⅲ型、耿贝尔分布等分布函数来进行分布拟合[16-19],再根据拟合函数的逆函数对其重现期进行计算。这些方法经过实践检验,在降水比较正常时对重现期的计算有较好的效果,但在降水序列中出现异常值时会有较大误差。由于异常降水的特性,其数据拟合时采用不同的概率密度函数,其结果会相差很大[20]。如果对异常降水数据点强行拟合,将导致拟合函数整体产生较大的偏差,因此本文尝试扩大概率密度函数的选择范围,综合考虑数学误差和工程适用性,探索选择概率密度函数的新方法。

1　资料和方法

1.1　数据来源

本文使用的数据为芦山县国家气象站 1980—2021 年的多个历时(60,120,180,360,720,1 440 min)的年最大值降水资料(图 1),是基于自记分钟降水资料滑动的连续时间取值,资料序列长度 42 a,其中包含 2020 年 8 月 11 日出现的极端降水。从年最大雨量分布来看,无论是哪一个历时(使用不同颜色来区分最大值上限),2020 年的数据变化十分

显著,通过计算(表 1),其与同序列平均值的差值已经超过 5 倍的标准差,为明显异常。但由于实况数据无法剔除,这种情况下,拟合的概率分布曲线会因为这个异常值而产生较大的误差。

表 1 不同历时的历史均值与 2020 年对比

Table 1 Comparison of historical averages of different durations with 2020

历时/min	历史序列均值/mm	序列标准差/mm	2020 年数值/mm	标准差/mm
60	42.2	18.2	136.1	5.2
120	55.2	31.7	229.1	5.5
180	64.8	48.4	348.6	5.9
360	81.7	56.2	409.3	5.8
720	98.5	57.6	423.5	5.6
1 440	107.7	57.0	425.7	5.6

1.2 重现期计算方法

目前计算重现期采用的比较多的方法是选择拟合优度检验判断数据分布是否服从某种分布[21-26],水文或气象上一般选用广义极值分布、伽马分布、皮尔逊Ⅲ型和耿贝尔分布等几个分布函数,然后对通过检验的分布函数用最小二乘法或高斯牛顿法等方法进行参数估计,得到最优的概率密度函数,再从中选取误差值最小的概率密度函数[27-31]。

实际上,对于现实的一组数据来说,并没有完全吻合的分布函数与之对应,基本是在某几种接近的分布中,挑选出最为接近的,然后再确定其参数。在计算降水的重现期时,有一个原则需要遵守,即短历时的重现期阈值一定要小于长历时的重现期阈值。在某些情况下,不同历时的降水量可能遵循相同的分布。例如,假设不同历时的降水量都遵循泊松分布,那么它们的分布参数(即平均降水量)可能会随着历时的增加而增加。在这种情况下,可以使用相同的分布来拟合不同历时的降水量重现期。然而,在另一些情况下,不同历时的降水量可能遵循不同的分布。例如,假设历时较短的降水量遵循泊松分布,而历时较长的降水量遵循负二项分布。在这种情况下,需要使用不同的分布来拟合不同历时的降水量重现期。

对图 1 的数据按不同历时绘制直方图(图 2)。可以看到,多个历时的分布基本相同,除了 2020 年的异常值,其他年份类似但总体不符合标准正态分布。不同的历时数据在分布、形状和中心趋势上相似,因此本文采用相同的分布函数来拟合所有的历时数据。

1.2.1 拟合优度检验

拟合优度检验是用于检验样本数据点与理论分布之间的拟合程度的一种假设检验方法,常用的有卡方拟合优度检验,柯尔莫哥洛夫—斯米尔诺夫检验,莱文—布鲁克斯—斯蒂芬森检验等。本文中使用卡方检验,能检验单个多项分类名义型变量各分类间的实际观测次数与理论次数之间是否一致的问题,属于非参数检验,这里的观测次数是根据样本数据得到的实计数,理论次数则是根据理论或经验得到的期望次数。这一类检验称为拟合性检验。其自由度通常为分类数减去 1,理论次数通常根据某种经验或理论。卡方拟合度检验用于判断不同类型结果的比例分布相对于一个期望分布的拟合程度。其计算公式为(1):

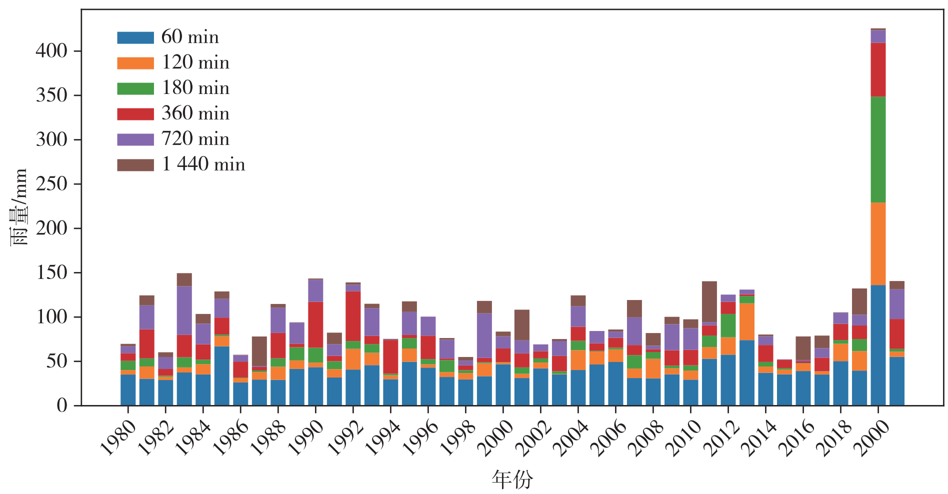

图 1 1980—2021 年芦山不同历时(单位:min)的年最大雨量

Fig.1 Annual maximum rainfall of different durations (unit: min) at Lushan from 1980 to 2021

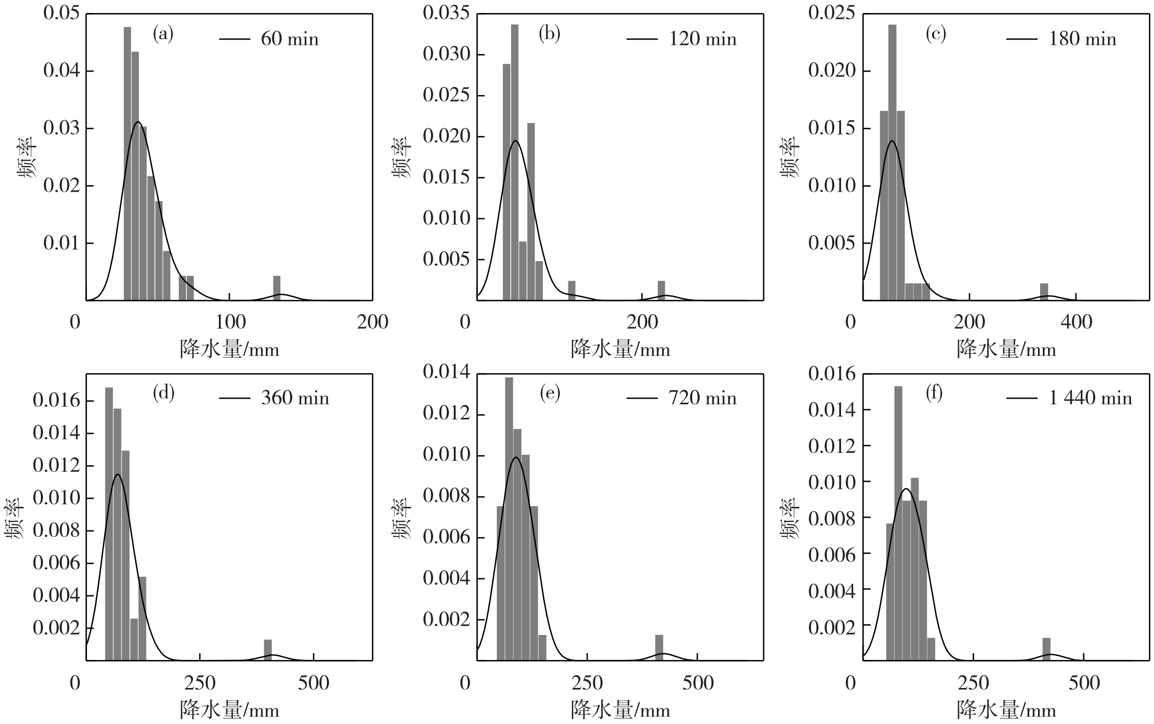

图 2　芦山站不同历时的数据分布

Fig.2　The data distribution of different durations at Lushan

$$\chi^2 = \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\ , \tag{1}$$

其中:f_0 为实际观察频次;f_e 为理论值。f_e 越大,近似效果越好,显然 f_0 与 f_e 相差越大,卡方值就越大,反之卡方值就越小。因此它能够用来表示 f_0 和 f_e 相差的程度。根据这个公式,可认为卡方检验的一般问题是要检验名义型变量的实际观测次数和理论次数分布之间是否存在显著差异。一般卡方检验方法进行统计检验时,要求样本含量应大于 40 且每个分类中的理论频数不应小于 5。当样本含量大于 40 但理论频数小于 5 的情况时卡方值需要校正,校正公式为(2):

$$\chi^2 = \sum \frac{(|f_0 - f_e| - 0.5)^2}{f_e}\ , \tag{2}$$

其中:0.5 为调整因子,用来保证当观察频数和期望频数相等时,离差平方和为 0。

1.2.2　卡方检验排序

对不同历时的数据进行标准化,然后拟合不同的概率密度函数进行卡方检验。本文采用了约 80 种分布函数(暂不一一列出),基本涵盖了目前使用的各种可能。检验返回两个参数,分别是卡方值和 p 值,卡方值越大,说明观察到的数据与期望数据之间存在越显著的差异,同样如果 p 值较小,说明观察到的数据与期望数据之间存在显著差异,对于 p 值小于 0.05 的分布函数,那么可以直接排除这种分布函数。根据返回的卡方值和 p 值如表 2 所示。可以看到卡方值与 p 值没有一致的关系,排名靠前的分布函数中短历时的 p 值总体要高于长历时的 p 值,但最高的概率密度函数,其对某些历时的降水标准化值的分布拟合的 p 值也没有全部都超过 0.95。文前已经通过分布直方图判定各个历时的分布情况较为一致,因此对所有历时选择同一种分布函数来拟合。表 2 为经过卡方检验后留存的分布函数。虽然未必选择排名靠前的函数,但排名靠后的函数被选择的可能性较低。

1.2.3　概率密度函数的参数估计和选取

一般来说,对于独立的一组数据,只要确定其分布满足某种概率分布,通过逼近法,总能够找到其误差最小的参数。现在一般使用最小二乘法或者高斯牛顿法等进行拟合得到误差最小时的各项参数。

针对降水分布的概率密度函数的选取要遵循两个原则,一是同一地点短历时降水阈值要低于长历时降水阈值,即 N 年一遇的 120 min 降水量要高于 60 min 的降水量,二是在满足一的基础上拟合的总体数学误差尽量最小。这样做数学精度牺牲最少,工程上的实用价值最大。

经过 1.2.2 节的筛选,本文从 80 种分布函数中

表 2 各历时分布函数的卡方值和 p 值(p>0.05)

Table 2 Chi square and p-values of distribution functions for each duration (p>0.05)

函数	60 min		120 min		180 min		360 min		720 min		1 440 min	
	卡方值	p 值	卡方值	p 值	卡方值	p 值	卡方值	p 值	卡方值	p 值	卡方值	p 值
genexpon	35.24	0.94	39.45	0.57	53.09	0.22	61.06	0.63	23.18	0.62	25.88	0.51
recipinvgauss	36.72	0.97	39.33	0.71	86.89	0.30	58.90	0.68	22.41	0.61	22.16	0.51
$gumbel_r$	26.82	0.38	43.31	0.20	92.65	0.29	69.25	0.66	33.11	0.92	32.42	0.74
pearson3	41.60	0.79	38.50	0.62	61.41	0.22	42.83	0.57	26.79	0.55	29.97	0.44
fatiguelife	39.03	0.98	41.12	0.76	90.05	0.30	61.29	0.7	22.25	0.61	21.89	0.51
exponnorm	34.70	0.96	46.51	0.58	115.82	0.32	76.39	0.68	24.74	0.68	21.68	0.56
beta	41.99	0.79	47.03	0.47	64.45	0.25	42.27	0.56	25.68	0.58	29.68	0.45
gengamma	87.52	0.31	44.61	0.92	93.74	0.61	41.59	0.36	24.47	0.71	22.39	0.58
invgauss	42.55	0.96	44.68	0.85	93.31	0.38	64.15	0.79	22.58	0.63	21.88	0.53
exponweib	61.11	0.48	55.88	0.93	120.17	0.73	37.39	0.29	22.03	0.8	19.91	0.69
lognorm	43.41	0.95	50.87	0.96	106.7	0.66	73.92	0.97	22.16	0.77	20.31	0.66
johnsonsb	43.76	0.95	50.93	0.96	106.94	0.67	73.67	0.97	22.38	0.78	20.34	0.67
$weibull_{min}$	62.83	0.53	47.32	0.48	49.32	0.17	45.26	0.32	47.59	0.42	55.14	0.34
powerlognorm	44.34	0.94	52.71	0.96	110.13	0.67	76.28	0.97	22.14	0.77	20.25	0.67
halflogistic	32.41	0.8	36.97	0.32	74.79	0.28	50.37	0.55	47.32	0.52	59.74	0.32
invgamma	45.61	0.94	60.2	0.88	124.75	0.8	87.24	0.99	22.35	0.84	19.64	0.74
johnsonsu	48.52	0.87	58.15	0.92	141.98	0.84	91.88	0.99	22.15	0.77	21.00	0.75
invweibull	46.30	0.93	63.99	0.84	132.59	0.84	92.97	0.99	22.93	0.84	19.94	0.73
fisk	44.49	0.96	65.87	0.81	144.61	0.93	101.06	0.99	28.08	0.91	23.46	0.74
alpha	43.93	0.92	70.96	0.73	145.14	0.92	102.66	0.99	24.58	0.86	20.47	0.72
wald	57.14	0.83	43.23	0.76	79.30	0.26	54.01	0.64	60.92	0.22	73.65	0.16
laplace	66.23	0.07	52.94	0.13	57.78	0.16	63.39	0.21	127.57	0.76	123.99	0.58
halfgennorm	79.30	0.41	39.67	0.23	51.22	0.25	41.04	0.44	105.68	0.16	94.27	0.16
expon	77.95	0.42	36.49	0.62	53.1	0.22	38.87	0.56	110.71	0.15	138.08	0.07
gilbrat	68.08	0.74	45.31	0.78	71.83	0.29	51.05	0.66	70.71	0.18	83.72	0.13
loglaplace	45.13	0.84	80.16	0.76	164.59	0.87	118.14	0.97	61.44	0.46	46.80	0.33
foldcauchy	38.08	0.91	89.46	0.58	158.45	0.81	108.2	0.81	54.78	0.31	25.61	0.14
logistic	92.25	0.15	63.11	0.23	56.50	0.28	59.44	0.32	85.22	0.75	95.19	0.77
gompertz	120.19	0.3	35.63	0.26	60.88	0.18	38.63	0.41	93.21	0.21	138.01	0.07
pareto	98.98	0.33	54.56	0.46	56.48	0.16	48.30	0.34	119.06	0.13	141.29	0.07
t	41.30	0.23	61.52	0.14	129.87	0.63	98.11	0.65	79.53	0.94	80.01	0.61
cauchy	57.92	0.09	72.54	0.11	137.56	0.33	111.68	0.31	151.75	0.44	155.30	0.35

剔除了不符合条件的分布函数,得到表 2 中的 32 个分布函数,对这 32 个函数使用以下两个步骤挑选:步骤一,使用不同的分布函数对多个历时进行拟合,计算其最优的位置参数及比例参数,使用其逆函数对 5~5 000 a(可以取更大值)一遇的降水阈值进行计算,并逐年对比,剔除短历时的重现期阈值大于长历时重现期阈值的分布。再对剩下的分布函数按照拟合残差平方和(RSS)从小到大进行排名。

通过步骤一发现,并不是卡方值靠前的分布函数都符合条件,以 beta 函数为例,将其频率函数 p 和 500 a 内的重现期绘制出图(图 3、4)。可以看

到,频率函数曲线在 720 min 和 1 440 min 在低频区存在交点,在 120 min 和 180 min 在大值区也有相交趋势,导致其重现期 120 min 和 180 min 在 290 a 一遇之后短历时的值将大于长历时的值,720 min 和 1 440 min 的重现期也必然在大值区相交,这与实际情况不符,因此,beta 分布函数被排除。同样原因,被排除掉的还有 fisk, invgamma, invweibull, alpha, foldcauchy, johnsonsu, beta, weibull_min, exponweib, gompertz, powerlognorm, t 函数共 12 种分布函数(图略),而保留下来的分布函数有 20 个,这些函数都能够对降水分布进行合理拟合。

步骤二中,对剩下满足条件的 20 个分布函数计算其拟合残差平方和(RSS)的多历时合计,以此来确定在数学精度上最小。经计算,其 RSS 从小到大的排名见表3。可以看到,排名前5的分布函数 RSS 相差都比较小,直接由其值进行分布的选定不是完全可靠,还需要其他方式进一步确认其误差。

为进一步评估拟合的精度,使用 Wasserstein 距离(Kantorovich-Rubinstein 距离)进行评估,该指标用于度量从一个分布转移到另一个分布的最小成本。它在比较两个分布的相似性、拟合度等方面具有重要意义。在一维情况下,假设有两个分布函数 $F(x)$ 和 $G(x)$,其中 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别是要比较的两个分布的累积分布函数(CDF)。Wasserstein 距离可以表示为公式(3),可以直观的认为,Wasserstein 距离测量了通过移动质量(概率密度)从一个分布到另一个分布所需的最小总成本。

$$W(F,G) = \int | F(x) - G(x) | \, dx 。 \quad (3)$$

对表 3 中的 20 个函数与不同历时的降水拟合后进行 Wasserstein 距离计算,并对不同历时的结果进行累加(表 4)。可以看到,通过 Wasserstein 距离的排序,gengamma、johnsonsb 和 lognorm 分布函数较为靠前。将表 3 中根据 RSS 的排名和表 4 中根据 Wasserstein 距离的排名两者进行相加,汇总后排序得到表 5。可以看到,johnsonsb 和 lognorm 排在前两名,johnsonsb 分布以微弱优势作为最终的拟合分布函数,这是权衡了两种评估方法的结果。

绘制 johnsonsb 分布与不同历时的降水量的 Q-Q图(图 5),在常规雨强部分,其观测值的分位数与理论分位数对应较好,基本分布在对角线附近。但对于2020年的异常点,仍有较大的偏离,说明针对

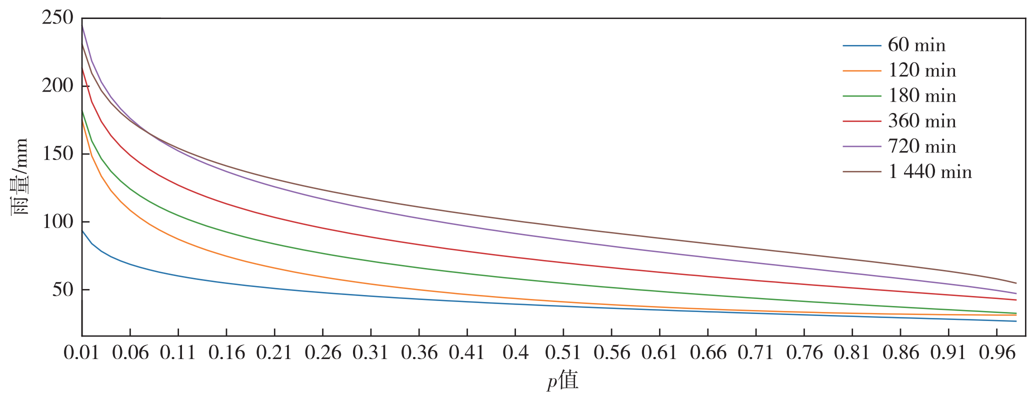

图 3　beta 函数拟合的不同重现期(单位:min)理论频率

Fig.3　Theoretical frequencies of different return periods(unit:min) fitted with beta functions

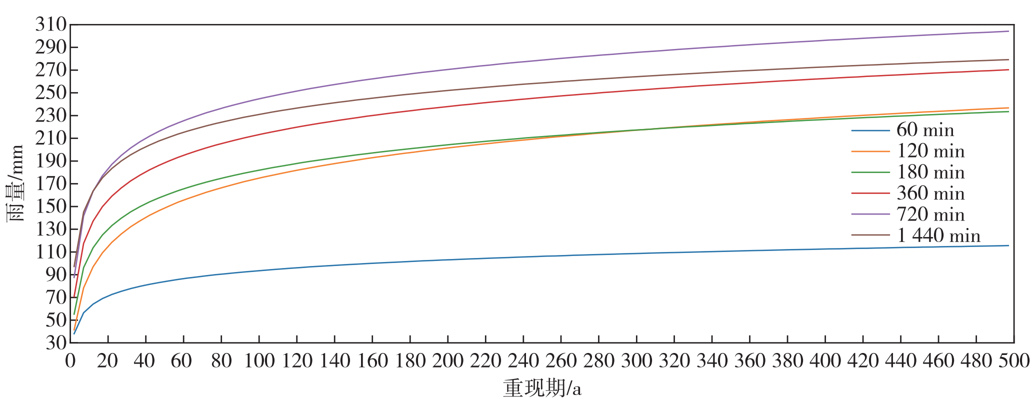

图 4　beta 函数拟合的各历时(单位:min)降水重现期

Fig.4　Return period of precipitation for each duration (unit:min) fitted by beta function

表 3 各分布函数拟合不同历时雨量的残差平方和排名

Table 3 The rank of residual sum of squares for fitting different durations of rainfall with different distribution functions

排名	函数	60/min	120/min	180/min	360/min	720/min	1440/min	累计
1	exponnorm	0.001 88	0.000 97	0.000 41	0.000 27	0.000 22	0.000 29	0.004 04
2	$gumbel_r$	0.002 32	0.000 96	0.000 32	0.000 22	0.000 16	0.000 24	0.004 23
3	johnsonsb	0.002 14	0.001 10	0.000 51	0.000 31	0.000 23	0.000 30	0.004 60
4	lognorm	0.002 15	0.001 1	0.000 52	0.000 32	0.000 23	0.000 31	0.004 62
5	loglaplace	0.00 271	0.000 88	0.000 26	0.000 24	0.000 27	0.000 39	0.004 75
6	invgauss	0.002 23	0.001 2	0.000 59	0.000 36	0.000 24	0.000 32	0.004 94
7	fatiguelife	0.002 30	0.001 23	0.000 6	0.000 37	0.000 24	0.000 31	0.005 05
8	laplace	0.002 86	0.001 06	0.000 31	0.000 26	0.000 24	0.000 36	0.005 08
9	recipinvgauss	0.002 38	0.001 27	0.000 61	0.000 38	0.000 24	0.000 32	0.005 19
10	gengamma	0.002 42	0.001 33	0.000 6	0.000 33	0.000 24	0.000 32	0.005 24
11	cauchy	0.003 15	0.001 00	0.000 33	0.000 29	0.000 32	0.000 40	0.005 48
12	logistic	0.003 32	0.001 35	0.000 47	0.000 33	0.000 16	0.000 25	0.005 89
13	wald	0.002 81	0.001 41	0.000 78	0.000 49	0.000 39	0.000 51	0.006 4
14	halflogistic	0.003 29	0.001 35	0.000 67	0.000 43	0.000 32	0.000 43	0.006 48
15	pearson3	0.003 31	0.002 08	0.000 87	0.000 53	0.000 25	0.000 35	0.007 40
16	gilbrat	0.003 35	0.001 64	0.000 92	0.000 57	0.000 42	0.000 54	0.007 44
17	genexpon	0.004 96	0.001 23	0.000 57	0.000 36	0.000 24	0.000 33	0.007 69
18	halfgennorm	0.004 69	0.002 25	0.001 02	0.000 75	0.000 43	0.000 53	0.009 67
19	expon	0.004 96	0.001 97	0.001 04	0.000 66	0.000 50	0.000 62	0.009 75
20	pareto	0.005 46	0.002 38	0.001 31	0.000 81	0.000 52	0.000 63	0.011 10

该异常值,模型拟合有较大偏差,并且异常值均在对角线之上,意味着实际数据的分位数高于理论分位数,即实际数据比理论分布的预期值更大,拟合模型更倾向于常规雨量。由于 2020 年的极端降水是稀有事件,特别是在其偏离均值超过 5 倍标准差的情况下,已属罕见,不能强行拟合该异常点而导致其余年份的降水拟合产生更大的误差。因此选择 johnsonsb 分布来拟合是一个综合的考量。最终选择的拟合函数 johnsonsb 分布,其不同历时降水的拟合参数如表 6 所示。

1.2.4 最终结果展示

经过挑选,选取了 johnsonsb 概率分布为芦山地区最终的拟合分布,使用表 6 的参数,用逆函数计算芦山站不同历时的 5~500 a 一遇的降水阈值(图 6)。从降水重现期可以看出,60、120、180、360 min 的重现期曲线之间有较明显的距离,而 720 min 与 1 440 min 的曲线相对接近,这与芦山当地较强的单次降水天气过程都集中在 12 h 内有关,使得两者的雨量较为接近。

对于 2020 年各历时的最大降水量进行了重现期计算,结果如表 7 所示。所有历时降水的重现期均已经超过 300 a 一遇,其中 60 min 历时的降水超过“300 a 一遇”,120 min 超过“600 a 一遇”,而 180、360、720 和 1 440 min 历时的雨量的重现期回算值已经超过千年,属于“1 000 a 一遇”的降水,当然这只能是概率学上的提法,是指同规模的降水量每年有千分之一以下的概率发生,而非绝对数值意义上的 1 000 a 有且只发生一次。由于采用的数据存量完全不足以涵盖百年乃至千年,也难以剔除偶然项,故而选取了模型推理的方式,可以给降水的历时强度一个定性的概念。

1.2.5 与常见的拟合分布对比

本文也对水文气象上过去常用的皮尔逊Ⅲ型、耿贝尔分布拟合的不同重现期理论频率进行绘图展示(图 7),并根据其逆函数计算 2020 年 8 月 11 日的降水量的重现期(表 8)。从图 7 中可以看到,三者的重现期理论频率都没有出现相交的情况,图像区别并不明显,但 $gumber_r$ 的图像在低频区间的

表 4　各分布函数拟合不同历时雨量的 Wasserstein 距离排名

Table 4　The rank of wasserstein distance for fitting different durations of rainfall with different distribution functions

排名	函数	60 min	120 min	180 min	360 min	720 min	1 440 min	累计
1	gengamma	0.001 2	0.000 7	0.000 6	0.000 4	0.000 5	0.000 6	0.003 9
2	johnsonsb	0.001 3	0.000 7	0.000 5	0.000 4	0.000 5	0.000 6	0.004 0
3	lognorm	0.001 3	0.000 7	0.000 5	0.000 4	0.000 5	0.000 6	0.004 0
4	recipinvgauss	0.001 1	0.000 8	0.000 6	0.000 5	0.000 5	0.000 6	0.004 1
5	fatiguelife	0.001 2	0.000 8	0.000 6	0.000 5	0.000 5	0.000 6	0.004 3
6	halflogistic	0.001 2	0.000 9	0.000 6	0.000 4	0.000 6	0.000 6	0.004 3
7	genexpon	0.001 4	0.000 8	0.000 6	0.000 5	0.000 5	0.000 6	0.004 3
8	invgauss	0.001 4	0.000 8	0.000 6	0.000 5	0.000 5	0.000 6	0.004 4
9	$gumbel_r$	0.001 4	0.001 0	0.000 6	0.000 5	0.000 5	0.000 5	0.004 4
10	exponnorm	0.001 3	0.000 8	0.000 6	0.000 5	0.000 6	0.000 6	0.004 4
11	pearson3	0.001 1	0.001 1	0.000 7	0.000 5	0.000 6	0.000 6	0.004 5
12	expon	0.001 4	0.001 0	0.000 7	0.000 6	0.000 8	0.000 7	0.005 1
13	halfgennorm	0.001 4	0.001 1	0.000 7	0.000 6	0.000 7	0.000 6	0.005 2
14	loglaplace	0.001 7	0.001 0	0.000 6	0.000 6	0.000 7	0.000 5	0.005 2
15	wald	0.001 6	0.001 0	0.000 8	0.000 6	0.000 8	0.000 8	0.005 5
16	gilbrat	0.001 6	0.001 0	0.000 8	0.000 7	0.000 8	0.000 8	0.005 7
17	laplace	0.002 0	0.001 2	0.000 7	0.000 7	0.000 6	0.000 6	0.005 8
18	logistic	0.002 2	0.001 4	0.000 8	0.000 7	0.000 5	0.000 5	0.006 1
19	cauchy	0.002 6	0.001 6	0.000 9	0.000 9	0.000 9	0.000 8	0.007 8
20	pareto	0.002 8	0.001 9	0.001 1	0.001 1	0.001 4	0.001 1	0.009 4

注:结果四舍五入保留 4 位小数.

数值明显低于 pearson3 和 johnsonsb,这样会导致通过其逆函数计算出来的重现期特别的大。从表 8 中也可以看到,对于 2020 年 8 月 11 日的降水量的重现期计算,三者有一个共同特点,即 180、360、720 和 1 440 min的重现期要大于 60、120 min。但 $gumber_r$ 的计算数值极为夸张,这显然不符合实际,pearson3 计算的值也偏大,180、360、720 min 的重现期都已经超过万年,这也不太符合气象规律。因此,选用 johnsonsb 分布计算出来的数值更贴近实际。

1.3　其他县区的计算展示

对雅安地区的雨城、天全、宝兴和石棉 4 个县进行同样的计算。各站的年最大雨量如图 8 所示,从分布可以看到,除石棉外,其他 3 个站点的雨量分布相对均匀,与极值雨量数值接近的年份出现频率较高,而石棉站 1994 年的最大雨量则比较显著,因此预估各站极值的重现期,石棉显然要高于其他站点。

根据 1.2 节的方法,各站挑选的最优分布函数如表 9 所示,可以看到不同站点的最优分布函数并不相同。说明芦山站的最优概率分布函数 johnsonsb 分布并没有普适性,每个站点都有自己的最优分布函数。从历史最大值的重现期也可以明显看到,石棉站的重现期要远高于其他站,特别是 720 和 1 440 min 已经超过“2 000 a 一遇”,而其余站基本在几十至几百年范围,这与图 7 中的雨量分布情况对应,这几个分布函数都较好地拟合了站点的雨量分布情况。

绘制各站的不同重现期的理论频率(图 9)和重现期(图 10),雨城站 360 和 720 min 曲线相对接近,石棉站 120 和 180 min 的曲线距离相对接近,而天全站和宝兴站各个历时的曲线距离则分开得较为明显,说明雨城站、石棉站发生较强短时强降水的概率要高于另外两地,天全站和宝兴站的降水持续时间可能更长,导致不同历时的最大降水区分明显。

2　结论

(1)本文中备选的概率密度函数有 80 种,经过

表 5 各分布函数拟合不同历时雨量的 RSS 和 Wasserstein 距离排名之和

Table 5 The sum of RSS and Wasserstein distance rankings for fitting different durations of rainfall using various distribution functions

最终排序	函数	RSS 排名	Wasserstein 距离排名	两者排名之和
1	johnsonsb	3	2	5
2	lognorm	4	3	7
3	exponnorm	1	10	11
4	gengamma	10	1	11
5	$gumbel_r$	2	9	11
6	fatiguelife	7	5	12
7	recipinvgauss	9	4	13
8	invgauss	6	8	14
9	loglaplace	5	14	19
10	halflogistic	14	6	20
11	genexpon	17	7	24
12	laplace	8	17	25
13	pearson3	15	11	26
14	wald	13	15	28
15	cauchy	11	19	30
16	logistic	12	18	30
17	expon	19	12	31
18	halfgennorm	18	13	31
19	gilbrat	16	16	32
20	pareto	20	20	40

表 6 johnsonsb 分布函数拟合不同历时雨量的参数表

Table 6 The parameters for fitting rainfall of different duration with Johnsonsb Distribution

历时/min	参数 a	参数 b	位置参数	尺度参数
60	0. 57	2. 16	−7. 62	84. 03
120	15. 42	3. 61	−9. 98	3 194. 91
180	13. 45	3. 02	−3. 09	3 572. 88
360	2. 11	1. 15	22. 36	181. 87
720	1. 88	0. 89	33. 58	183. 46
1 440	5. 19	1. 58	28. 68	839. 41

注:参数保留 2 位小数

表 7 芦山站 2020 年各历时的最大降水量和对应重现期

Table 7 The maximum rainfall and return period of each duration at Lushan Station in 2020

历时/min	60	120	180	360	720	1440
雨量/mm	136. 1	229. 1	348. 6	409. 3	423. 5	425. 7
重现期/a	343	640	2605	1750	1878	1822

表 8 芦山站使用不同拟合分布函计算的不同历时最大降水量的重现期

Table 8 Return periods of maximum rainfall for different durations at Lushan Station, calculated using various fitted distribution functions

a

使用分布/min	60	120	180	360	720	1 440
johnsonsb*	343	640	2 605	1 750	1 878	1 822
pearson3	2 575	3 313	32 159	20 721	12 202	8 170
$gumbel_r$	71 994	758 439	15 315 765	5 175 840	200 226	108 505

注:* 为最优分布

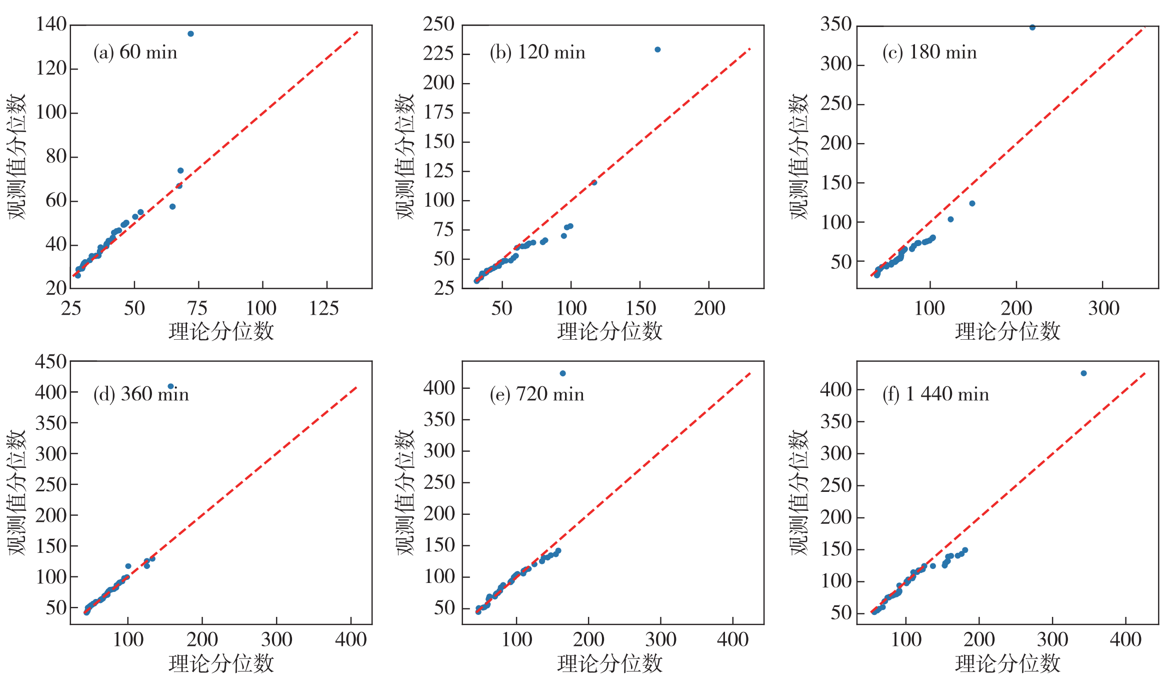

图 5 芦山不同历时雨量的 johnsonsb 分布 *Q-Q* 图

Fig.5 *Q-Q* diagram of exponnorm distribution of precipitation in different durations in Lushan

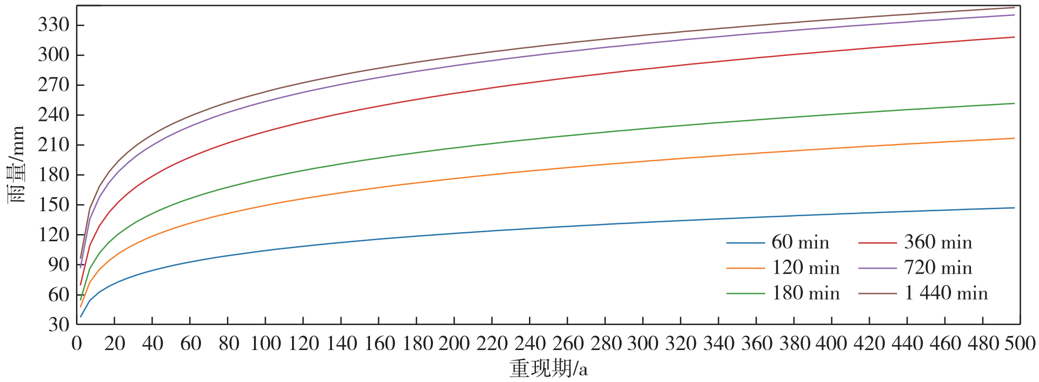

图 6　芦山各历时降水重现期

Fig.6　Precipitation return period of each duration in Lushan

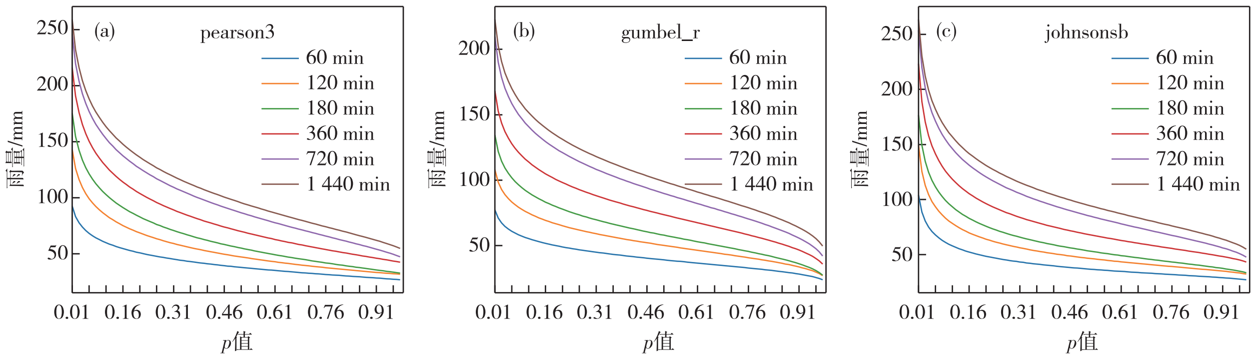

图 7　芦山站使用不同拟合分布函数的重现期理论频率

Fig.7　Theoretical frequency of return period using different fitted distribution functions at Lushan

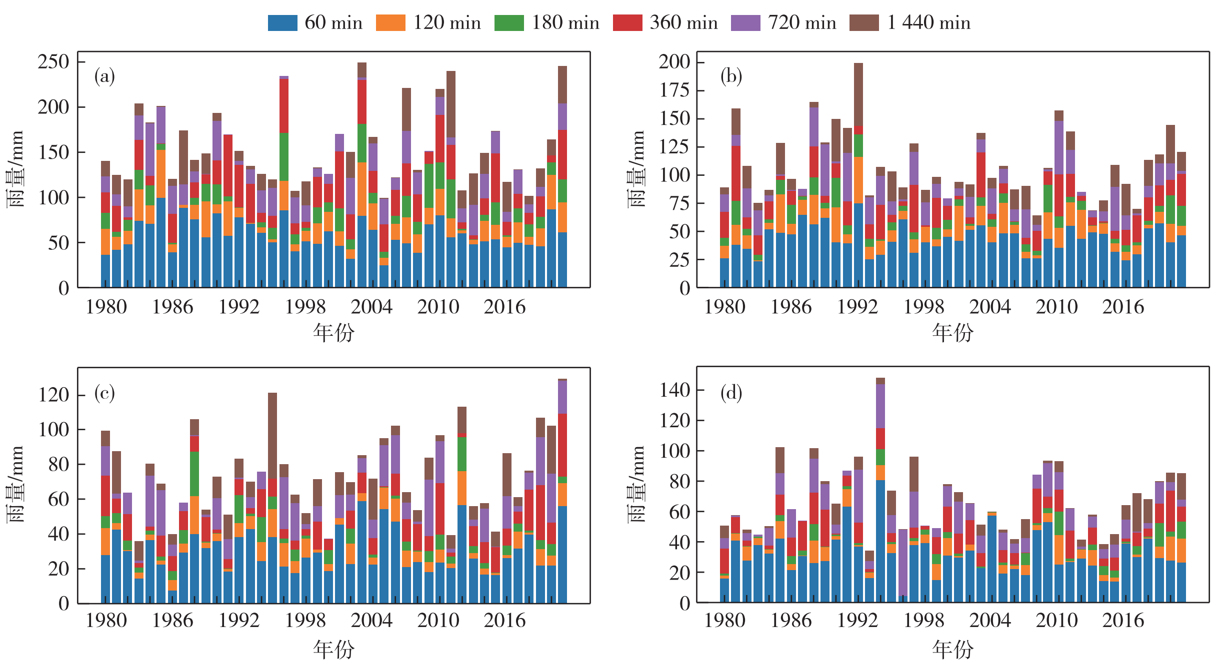

图 8　雨城(a)、天全(b)、宝兴(c)和石棉(d)站 1980—2021 年不同历时的年最大雨量

Fig.8　Annual maximum rainfall of different durations from 1980 to 2021 at Yucheng (a), Tianquan (b), Baoxing (c) and Shimian (d) stations

了卡方检验后剔除了 p 值小于 0.05 的部分函数,再对不同历时的分布函数概率密度曲线可能会产生交叉的函数进行剔除,然后对剩余的拟合函数与实况数据进行拟合,通过累加残差平方和、Wasserstein 距离这两个指标的排名之和从小到大进行再排序,挑选出排序最靠前的分布函数。函数的选取过程

表 9 雨城、天全、宝兴和石棉的最优函数和最大降水量的历时重现期

Table 9 Optimal functions and maximum rainfall duration return Periods for Yucheng, Tianquan, Baoxing, and Shimian

站名	最优分布函数	历时/min	平均值/mm	历史最大值/mm	最大值重现期/a
雨城	invweibull	60	58.7	99.5	22
		120	78.7	152.5	29
		180	94.0	181.4	59
		360	120.3	231.6	51
		720	140.2	234.6	44
		1440	155.7	249.1	29
天全	exponnorm	60	43.2	75.1	116
		120	56.9	116.4	244
		180	65.2	136.1	175
		360	80.4	143.9	46
		720	95.8	160.3	31
		1440	108.6	199.8	48
宝兴	genlogistic	60	30.1	58.8	34
		120	37.3	76.2	52
		180	42.4	95.5	115
		360	53.4	109.0	73
		720	65.3	128.1	91
		1440	74.7	129.1	32
石棉	gennorm	60	32.0	81.0	420
		120	38.0	90.6	445
		180	41.6	101.3	803
		360	50.8	115.0	479
		720	61.9	144.1	2150
		1440	67.6	148.2	2438

合理科学,比起常规的水文气象上直接从有限的3~5个拟合分布中挑选的方法更加全面,在保证了拟合总体数学误差更小的同时,兼顾了工程实用,其在数学精度牺牲最少,工程上的实用价值最大。

(2)从1.2节和1.3节中可以看到,尽管在同一市区,对于不同县区站点的降水数据分布,其最优拟合分布函数是不同的,虽然很多分布函数在形态上相当接近,但在数学精度上仍可以找出最优的一个。另外,1.2节实例中使用的芦山站数据是1980年以来有分钟雨量数据后42 a的年最大雨量值,其数据长度虽然基本满足了卡方检验的样本数,但仍然显得偏少,且最后选择的johnsonsb分布函数依然是保证了大多数的数据分布,对2020年异常点的拟合仍有一定误差,但不能因为强行拟合这一个异常点,而损失更多的数学精度。当有新的极端降水出现时,其最优分布函数可能会有改变,因此在实际应用中需要经常更新,建议更新频率最少2 a一次。

(3)本文选择的方法具备通用性,在其他需要计算重现期的场合同样可以使用。特别是随着全球变暖,极端降水频频出现,当出现异常降水时,使用该方法计算的重现期在接近实际情况的同时,能保证其数学精度。

参 考 文 献

[1] 钟东良, 李思萍, 曾钦文, 等. 不同重现期降水对粤东北暴雨灾害风险的影响. 广东气象, 2022, 44(1): 69-73.
ZHONG Dongliang, LI Siping, ZENG Qinwen, et al. Effects of precipitation in different return periods on rainstorm disaster risk in Northeast Guangdong. Guangdong Meteorology (in Chinese), 2022, 44(1): 69-73.

[2] 林文青, 陈活泼, 徐慧文, 等. 西南地区未来极端降水增加将导致其人口暴露风险加剧. 大气科学学报, 2023, 46(4): 499-516.
LIN Wenqing, CHEN Huopo, XU Huiwen, et al. Significant increase of precipitation extremes will enlarge its population exposure over Southwest China in the future. Transactions of Atmospheric Sciences (in Chinese), 2023, 46(4): 499-516.

[3] 邬晓丹, 罗敏, 孟凡浩, 等. 气候暖湿化背景下新疆极端气候事件时空演变特征分析. 干旱区研究, 2022, 39(6): 1695-1705.
WU Xiaodan, LUO Min, MENG Fanhao, et al. New characteristics of spatio-temporal evolution of extreme climate events in Xinjiang under the background of warm and humid climate. Arid Zone Research (in Chinese), 2022, 39(6): 1695-1705.

[4] 江远安, 尹宜舟, 陈鹏翔, 等. 1961—2014年新疆降水极值概率特征及拟合不确定性分析. 气候变化研究进展, 2017, 13(1): 52-60.
JIANG Yuan'an, YIN Yizhou, CHEN Pengxiang, et al. Study on probabilistic characteristic and uncertainty in fitting of precipitation extremes over Xinjiang during 1961-2014. Climate Change Research (in Chinese), 2017, 13(1): 52-60.

[5] 孙善磊, 周锁铨, 金博, 等. 淮海地区降水周期及突变特征分析. 气象科学, 2010, 30(2): 221-227.
SUN Shanlei, ZHOU Suoquan, JIN Bo, et al. Study on periodic and abrupt changes of precipitation in Huaihai region. Scientia Meteorologica Sinica (in Chinese), 2010, 30(2): 221-227.

[6] 栾澜, 翟盘茂. 基于多源数据的青藏高原雨季降水特征变化分析. 气候变化研究进展, 2023, 19(2): 173-190.
LUAN Lan, ZHAI Panmao. Changes in rainy season precipitation

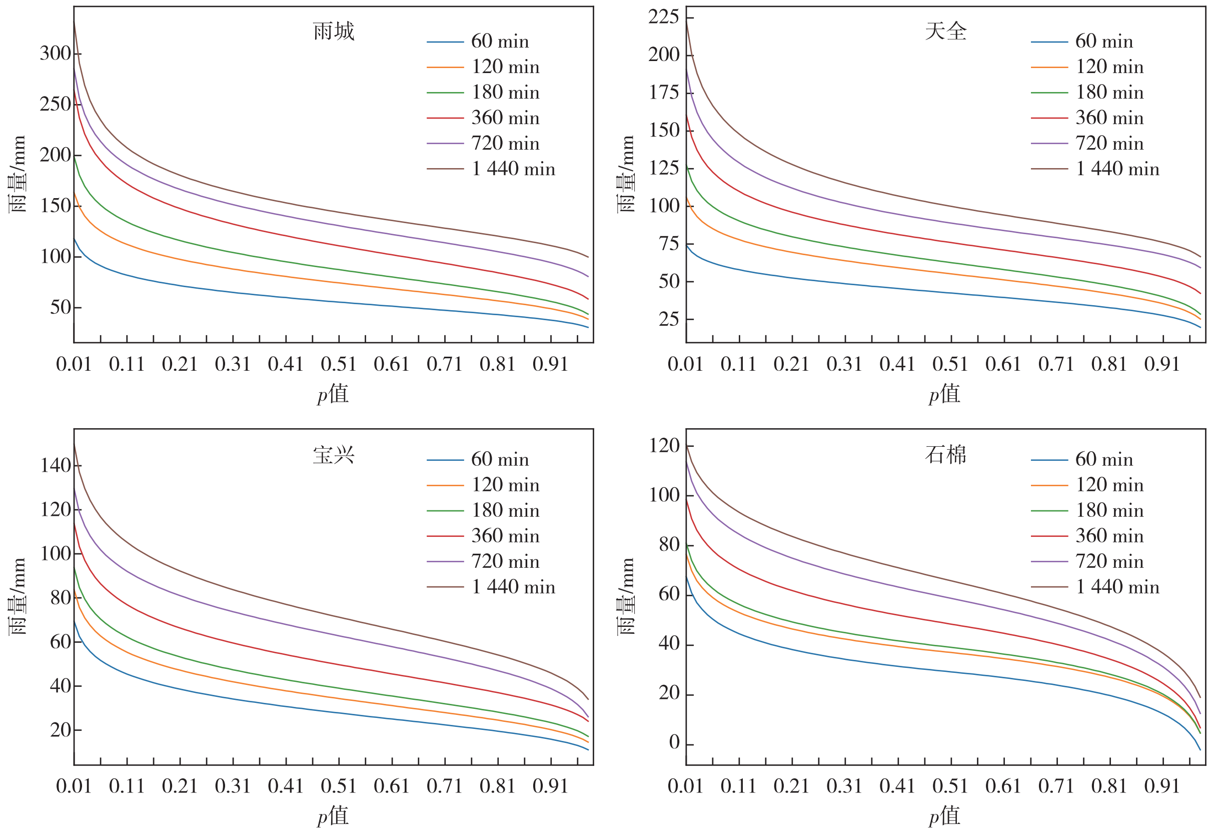

图 9　雨城、天全、宝兴和石棉站的不同重现期理论频率

Fig.9　Theoretical frequencies of different return periods for Yucheng, Tianquan, Baoxing, and Shimian

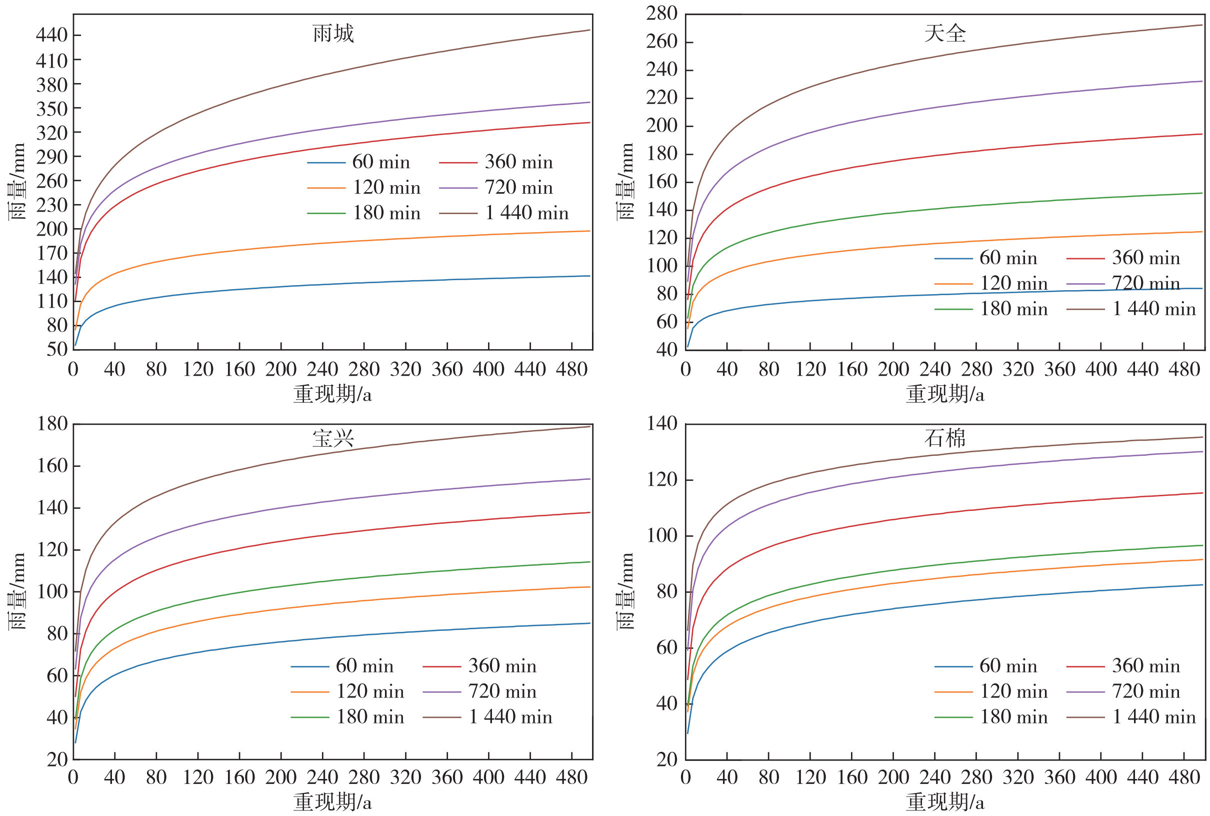

图 10　雨城、天全、宝兴和石棉站的各历时降水重现期

Fig.10　Precipitation return periods for different durations in Yucheng, Tianquan, Baoxing, and Shimian

properties over the Qinghai-Tibet Plateau based on multi-source datasets. Climate Change Research (in Chinese), 2023, 19(2): 173-190.

[7] 蒋薇，宋连春，王式功，等. 长江三角洲夏季降水异常及气候成因. 气象科学，2009，29(3)：355-361.
JIANG Wei, SONG Lianchun, WANG Shigong, et al. Study on summer anomalies of precipitation and climatic causes in the Yangtze River Delta. Scientia Meteorologica Sinica(in Chinese), 2009, 29(3): 355-361.

[8] 叶梦茜，余锦华，谢洁宏，等. 中国东部区域极端降水事件特征——两种方法监测对比. 气象科学，2021，41(6)：752-760.
YE Mengxi, YU Jinhua, XIE Jiehong, et al. Characteristics of extreme precipitation events in eastern China——a comparison of the two methods of detection. Journal of theMeteorological Sciences (in Chinese), 2021, 41(6): 752-760.

[9] 兰明才，张耀存. 东亚副热带急流与东北夏季降水异常的关系. 气象科学，2011，31(3)：258-265.
LAN Mingcai, ZHANG Yaocun. Relationship between the East Asian subtropical westerly jet and summer rainfall anomaly in Northeast China. Journal of the Meteorological Sciences (in Chinese), 2011, 31(3): 258-265.

[10] 尹家波，郭生练，王俊，等. 全球极端降水的热力学驱动机理及生态水文效应. 中国科学：地球科学，2023，53(1)：96-114.
YIN Jiabo, GUO Shenglian, WANG Jun, et al. Thermodynamic driving mechanisms for the formation of global precipitation extremes and ecohydrological effects. Science China Earth Sciences, 2023, 66(1): 92-110.

[11] 张磊，罗平平，王小珲，等. 1960—2019 年关中平原极端降水时空变化及非平稳性分析. 水利水电技术，2023，54(3)：35-46.
ZHANG Lei, LUO Pingping, WANG Xiaohui, et al. Spatial and temporal variation and non-stationary analysis of extreme precipitation in Guanzhong Plain from 1960 to 2019. Water Resources and Hydropower Engineering(in Chinese), 2023, 54(3): 35-46.

[12] 袁冯，张君枝，王冀，等. 气候变化背景下北京市短历时暴雨的强度及雨型变化特征. 大气科学学报，2020，43(5)：802-809. doi：10.13878/j.cnki.dqkxxb.20191129001.
YUAN Feng, ZHANG Junzhi, WANG Ji, et al. Variation characteristics of intensity and pattern of short duration rainstorm in Beijing under the background of climate change. Transactions of Atmospheric Sciences(in Chinese), 2020, 43(5): 802-809. doi: 10.13878/j.cnki.dqkxxb.20191129001.

[13] 任玉峰，汤正阳，杨旭，等. 基于联合样本和分布函数的极端降水重现期分析. 人民长江，2022，53(10)：65-70. doi：10.16232/j.cnki.1001-4179.2022.10.010.
REN Yufeng, TANG Zhengyang, YANG Xu, et al. Return period analysis of extreme rainfall based on combined sample series and optimal-selection of distribution functions. Yangtze River (in Chinese), 2022, 53(10): 65-70. doi: 10.16232/j.cnki.1001-4179.2022.10.010.

[14] 孙桂凯，马龙，王熙财，等. 广西极端降水空间分布特征及重现期分析. 水电能源科学，2022，40(8)：9-12，31. doi：10.20040/j.cnki.1000-7709.2022.20212063.
SUN Guikai, MA Long, WANG Xicai, et al. Spatial distribution characteristics and recurrence period analysis of extreme precipitation in Guangxi. Water Resources and Power (in Chinese), 2022, 40(8): 9-12, 31. doi: 10.20040/j.cnki.1000-7709.2022.20212063.

[15] 王同旭. 历史洪水调查重现期实例分析. 黑龙江科学，2022，13(20)：33-35.
WANG Tongxu. Case study of historical flood recurrence period. Heilongjiang Science (in Chinese), 2022, 13(20): 33-35.

[16] 孙艳，曾燕，邱新法，等. 基于不同重现期的1960—2019年长三角地区区域降水风险评估. 气象科学，2023，43(1)：110-117.
SUN Yan, ZENG Yan, QIU Xinfa, et al. Risk assessment of regional precipitation in Yangtze River Delta from 1960 to 2019 based on different return periods. Journal of the Meteorological Sciences (in Chinese), 2023, 43(1): 110-117.

[17] 陈兴旺. 广义极值分布理论在重现期计算的应用. 气象与减灾研究，2008，31(4)：52-54.
CHEN Xingwang. Application of generalized extreme value distribution theory in calculating return periods. Meteorology and Disaster Reduction Research (in Chinese), 2008, 31(4): 52-54.

[18] 赵立. 分别用耿贝尔(Gumbel)极值分布和广义(GEV)极值分布拟合五华县降水极值. 广东水利水电，2017，(10)：17-20.
ZHAO Li. The extreme value of precipitation in Wuhua County fitted by Gumbel extreme distribution and generalized (GEV). Guangdong Water Resources and Hydropower (in Chinese), 2017, (10): 17-20.

[19] 叶香，陆维松，张天宇，等. 近46 a重庆汛期极端降水量异常特征. 南京气象学院学报，2008，31(5)：646-654.
YE Xiang, LU Weisong, ZHANG Tianyu, et al. Anomaly characteristics of extreme precipitation over Chongqing in flood season during 1961—2006. Journal of Nanjing Institute of Meteorology (in Chinese), 2008, 31(5): 646-654.

[20] 杨娟. 用Pearson-Ⅲ型概率分布推算贵阳降水量的重现期. 贵州气象，2015，39(4)：8-11.
YANG Juan. To reckon the recurrence interval of precipitation in Guiyang with Pearson-Ⅲ-probability distribution. Journal of Guizhou Meteorology (in Chinese), 2015,39(4): 8-11.

[21] 范嘉炜，袁明道，马妍博，等. 二次重现期在暴雨洪涝灾害中的应用研究. 水资源与水工程学报，2018，29(1)：149-154.
FAN Jiawei, YUAN Mingdao, MA Yanbo, et al. Analysis of risk probability of different duration rainstorm disasters based on secondary return period. Journal of Water Resources & Water Engineering (in Chinese), 2018, 29(1): 149-154.

[22] 汪婷，包云轩，陈粲，等. 昆山市暴雨短历时设计雨型的推求. 气象科学，2021，41(2)：259-269.
WANG Ting, BAO Yunxuan, CHENCan, et al. Deduction of short-duration designed rainstorm pattern in Kunshan City. Journal of the Meteorological Sciences (in Chinese), 2021, 41(2): 259-269.

[23] 孟庆珍，王增武，梁秋枫. 重庆地面气温年极大值渐近分布的

拟合试验. 成都信息工程学院学报, 2005, 20(2): 192-198.
MENG Qingzhen, WANG Zengwu, LIANG Qiufeng. Comparison between fitting results of four distribution functions and asymptotic distribution of the yearly maximum surface temperature over Chongqing. Journal of Chengdu University of Information Technology (in Chinese), 2005, 20(2): 192-198.

[24] 王晓光. 气象要素重现期的计算方法与比较. 内蒙古气象, 2015, (5): 29-32. doi: 10.14174/j.cnki.nmqx.20151019.019.
WANG Xiaoguang. The calculation methods of meteorological elements return period and comparison. Meteorology Journal of Inner Mongolia (in Chinese), 2015, (5): 29-32. doi: 10.14174/j.cnki.nmqx.20151019.019.

[25] 张波, 谷晓平, 古书鸿. 贵州省最大日降水量时空分布及重现期估算. 水土保持研究, 2017, 24(1): 167-172. doi: 10.13869/j.cnki.rswc.2017.01.021.
ZHANG Bo, GU Xiaoping, GU Shuhong. Temporal and spatial distributions of maximum daily precipitation and recurrence periods in Guizhou Province. Research of Soil & Water Conservation (in Chinese), 2017, 24(1): 167-172. doi: 10.13869/j.cnki.rswc.2017.01.021.

[26] 姬鹏杰, 杜坤, 冯燕, 等. 考虑经验因素的暴雨频率曲线最优化拟合算法. 土木建筑与环境工程, 2018, 40(2): 77-82.
JI Pengjie, DU Kun, FENG Yan, et al. Optimal fitting algorithm of rainstorm frequency curve considering the empirical factors. Civil Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering (in Chinese), 2018, 40(2): 77-82.

[27] 白龙, 吴滨, 杨丽慧, 等. 基于多种拟合方法的福州长短历时暴雨强度公式研究. 海峡科学, 2020, (9): 12-15, 32.
BAI Long, WU Bin, YANG Lihui, et al. Study on the formula of long and short duration rainstorm intensity in Fuzhou based on multiple fitting methods. Straits Science (in Chinese), 2020, (9): 12-15,32.

[28] 赖亚胜. 高要地区不同重现期风速风压的估算. 广东气象, 2022, 44(3): 15-18.
LAI Yasheng. Estimatingthewind speed and wind pressure for the Area of Gaoyao in various recurrence intervals. Guangdong Meteorology (in Chinese), 2022, 44(3): 15-18.

[29] 李杰, 陈建兵, 张琳琳. 随机过程的概率密度函数估计. 应用力学学报, 2010, 27(3): 481-485.
LI Jie, CHEN Jianbing, ZHANG Linlin. Probability density function estimation of stochastic processes. Chinese Journal of Applied Mechanics (in Chinese), 2010, 27(3): 481-485.

[30] 史黎翔, 宋松柏. 多变量洪水重现期计算研究//变化环境下的水科学与防灾减灾——第十二届中国水论坛论文集.北京: 中国水利水电出版社, 2014: 374-379.
SHI Lixiang, SONG Songbai. Study on the calculation of multivariable flood return period // Water Science and disaster Prevention and reduction in a changing Environment——Proceedings of the 12th China Water Forum. Beijing: China Water&Power Press (in Chinese), 2014: 374-379.

[31] 李国景. 长汀县 1956—2017 年降水统计及最大降水量重现期估算. 水利科技, 2018, (4): 9-11.
LI Guojing. Precipitation statistics and estimation of maximum precipitation recurrence period in Changting county from 1956 to 2017. Hydraulic Science and Technology (in Chinese), 2018, (4): 9-11.